RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 19 gennaio 1919.

F. D'Ovidio, Presidente.

MEMORIE E NOTE
DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Meccanica. — *ds^2 einsteiniani in campi newtoniani.* IX. *L'analogo del potenziale logaritmico.* Nota del Socio T. Levi-Civita.

Nella Nota precedente (1) abbiamo assegnata un'ampia classe di ds^2 einsteiniani i cui coefficienti dipendono da due sole coordinate di spazio: ad ogni ordinario potenziale simmetrico $v(r, z)$ (r distanza dall'asse di simmetria Oz) corrisponde univocamente un ds^2 di tale classe. Un esempio meritevole di particolare attenzione si ha supponendo v indipendente da z, con che esso si riduce alla forma $h \log \frac{r}{r_0}$ (h, r_0 costanti) e conviene all'attrazione newtoniana dell'asse, supposto sede di una distribuzione lineare omogenea, od anche di un qualsiasi cilindro coassiale, indefinito, omogeneo (rispetto a cui il punto potenziato sia esterno), avente, per unità di lunghezza, la stessa massa della retta. Il relativo ds^2 einsteiniano appare interessante perchè determina rigorosamente l'influenza geometrica, meccanica ed ottica di un cilindro materiale.

Di ciò tratta la presente Nota; ed eccone le conclusioni.

Lo spazio circostante al cilindro non resta più euclideo, ma si atteggia a varietà normale di Bianchi con le tre curvature principali tutte distinte. Le coordinate cilindriche r, z, x_3 dello spazio euclideo, non perturbato dalla

(1) In questi Rendiconti, vol. XXVII (2° semestre 1918), pp. 3-13.

presenza del cilindro, divengono (a cilindro ridotto e equilibrio ristabilito) coordinate curvilinee dello spazio distorto e ne costituiscono le linee principali di curvatura. Si può quindi dire — l'esiguità della distorsione rendendo espressiva la rappresentazione euclidea — che le linee principali di curvatura risultano dirette radialmente, assialmente, secondo il parallelo. Le curvature principali variano tutte in ragione inversa del quadrato della distanza (geodetica) dell'asse: quella corrispondente alle giaciture normali all'asse è di un ordine di grandezza inferiore alle altre due, e può trascurarsi di fronte ad esse che (nello stesso ordine di approssimazione) riescono eguali ed opposte.

La forza d'attrazione è tutta radiale (cioè diretta secondo la linea r, verso l'asse), come nella teoria ordinaria; però l'intensità non è rigorosamente proporzionale all'inversa della distanza (geodetica) dall'asse, bensì ad una potenza lievissimamente superiore a -1.

La velocità della luce V varia proporzionalmente a r^h (§ 4), ma, stante la piccolezza di h in eventuali esperienze di laboratorio (cfr. il § 6), non vi è da sperare, nemmeno coi mezzi odierni dell'ottica, di rendere questa variazione di V accessibile a controllo diretto.

1. — Richiami — Linee isometriche e loro proprietà generali.

Le soluzioni binarie esplicitate nella Nota precedente corrispondono a ds^2 statici del tipo

$$V_0^2\, e^{2\nu}\, dt^2 - dl^2, \tag{1}$$

dove V_0 rappresenta una costante avente le dimensioni di una velocità, e il quadrato dell'elemento lineare di spazio ammette la forma canonica

$$dl^2 = e^{-2\nu}\left\{ e^{2\lambda}(dr^2 + dz^2) + r^2\, dx_3^2 \right\}: \tag{2}$$

$\nu(r, z)$ designa un generico potenziale simmetrico, cioè un integrale particolare qualunque dell'equazione

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \nu}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2 \nu}{\partial z^2} = 0, \tag{3}$$

e λ è subordinatamente definita, a meno di una costante additiva inessenziale [cfr. il § 4 della Nota prec.], dall'equazione ai differenziali totali

$$d\lambda = r(\nu_1^2 - \nu_2^2)\, dr + 2r\, \nu_1\, \nu_2\, dz \quad \left(\nu_1 = \frac{\partial \nu}{\partial r}\ ,\ \nu_2 = \frac{\partial \nu}{\partial z}\right). \tag{4}$$

Si deve limitarsi a valori positivi di r, mentre z e x_3 possono assumere valori reali qualisivogliono.

Per $\nu = 1$, λ si può ritenere eguale ad 1; il dl^2 appartiene allora allo spazio euclideo riferito a coordinate cilindriche r, z, x_3, quest'ultima interpretandosi evidentemente come azimut attorno all'asse Oz. Le linee x_3 ($r = \text{cost.}, z = \text{cost.}$) sono in questo caso i circoli paralleli.

Più generalmente, in corrispondenza ad un qualsiasi potenziale simmetrico $v(r, z)$, tutti i coefficienti del ds^2 conservano lo stesso valore lungo le linee x_3: chiamerò per ciò *isometriche* tali linee. Un'ovvia conseguenza di questo loro comportamento rispetto alla metrica spaziale (2) si è che ognuna ha la flessione costante. Per conseguirne la espressione esplicita, si ricorda:

1°) che la flessione Γ d'una linea x_3 è caratterizzata dai due coefficienti di rotazione $\gamma_{133}, \gamma_{233}$ (1), essendo precisamente $\Gamma = \left| \sqrt{\gamma_{133}^2 + \gamma_{233}^2} \right|$;

2°) [cfr. Nota IV, § 2] che, per ogni dl^2 ternario della forma $\sum_1^3 {}_i e^{2\mathfrak{h}_i} dx_i^2$, si h

$$\gamma_{3i3} = - e^{-\mathfrak{h}_i} \frac{\partial \mathfrak{h}_3}{\partial x_i} \qquad (i = 1, 2),$$

γ_{313} potendosi anche risguardare (2) come curvatura geodetica della linea x_3 sopra la superficie $x_2 = \text{cost.}$ che la contiene; γ_{323} come analoga curvatura sopra la superficie $x_1 = \text{cost}$: l'una e l'altra prese con debito segno.

Con referenza a (2), ove si faccia corrispondere r ad x_1 e z ad x_2, si ha in particolare

$$\mathfrak{h}_1 = \mathfrak{h}_2 = \lambda - \nu \quad , \quad \mathfrak{h}_3 = - \nu + \log r,$$

e quindi

$$\gamma_{313} = - e^{\nu - \lambda} \left(\frac{1}{r} - \nu_1 \right) \quad , \quad \gamma_{323} = e^{\nu - \lambda} \nu_2 . \tag{5}$$

Dacchè tutto risulta indipendente da x_3, rimane acquisito che ogni linea isometrica è dotata di flessione costante.

Prendiamo in considerazione una generica superficie $z = \text{cost.}$ Il quadrato del suo elemento lineare è, in base alla (2),

$$e^{2(\lambda - \nu)} dr^2 + e^{-2\nu} r^2 dx_3^2 .$$

I coefficienti di dr^2 e di dx_3^2 (avendo ormai z un valore costante) dipendono esclusivamente da r; perciò le linee r ($x_3 = \text{cost}$) sono geodetiche, e le linee x_3, cioè *le linee isometriche, oltre ad avere curvatura geodetica costante, sono* — secondo la definizione del Bianchi (3) — *circoli geo-*

(1) Ricci et Levi-Civita, *Méthodes* etc., Math. Ann., B. 54, 1900, pag. 154.

(2) Bianchi, *Lezioni di geom. differenziale*, vol. I [Pisa, Spoerri, 1902], pp. 179-181.

(3) Loc. cit., pag. 196.

detici delle superficie $z = \text{cost.}$ La loro distanza geodetica ϱ dal centro, o circolo singolare, $r = 0$ è

$$\varrho = \int_0^r e^{\lambda - \nu}\, dr\,, \tag{6}$$

il limite superiore dell'integrale essendo il valore di r, che spetta all'isometrica di cui si tratta, e dovendosi, ben si intende, risguardare la z (che comparisce pel tramite di $\lambda - \nu$) costante col valore che spetta alla stessa isometrica.

2. — Potenziali logaritmici — Più stretta analogia delle linee isometriche coi circoli paralleli dello spazio ordinario — Distanza dall'asse — Flessione.

Occupiamoci in particolare dei potenziali logaritmici, cioè di quelle soluzioni della (3), che non dipendono da z. Si ha per essi, designando con h una costante arbitraria,

$$\nu_1 = \frac{h}{r} \quad , \quad \nu_2 = 0\,, \tag{7}$$

e quindi, designando con r_0 una seconda costante,

$$\nu = h \log \frac{r}{r_0}\,. \tag{7'}$$

La funzione ν, per tutti i ds^2 della classe (1), si risguarda dotata di dimensioni nulle; r è una lunghezza. Perciò il prodotto $r\nu_1$ è un puro numero, e con esso la costante h. Dalla (7'), che equivale a $\frac{r}{r_0} = e^{\frac{\nu}{h}}$, risulta ulteriormente che r_0 ha le dimensioni di una lunghezza.

La (4), coi valori (7), porge

$$\lambda_1 = \frac{\partial \lambda}{\partial r} = \frac{h^2}{r} \quad , \quad \lambda_2 = \frac{\partial \lambda}{\partial z} = 0\,, \tag{8}$$

donde, a meno di una inessenziale costante additiva,

$$\lambda = h^2 \log \frac{r}{r_0}\,. \tag{8'}$$

La circostanza che, nell'espressione (2) del dl^2 (senza termini rettangoli in dz), tutti i coefficienti sono, nel caso attuale, indipendenti da z, permette di affermare che *le superficie* $z = \text{cost.}$ *sono piani geodetici*: basta aver riguardo alle equazioni lagrangiane delle geodetiche. Le linee isometriche $x_3 = \text{cost.}$ hanno così non soltanto la flessione costante, ma anche le altre caratteristiche degli ordinari circoli paralleli attorno all'asse Oz, essendo circoli geodetici dei piani, pure geodetici, $z = \text{cost.}$

Dacchè ogni geodetica di tali piani lo è altresì rispetto allo spazio ambiente, *la* ϱ *definita dalla* (6) *rappresenta la minima distanza d'una generica isometrica dall'asse* (superficie singolare) $r = 0$, *il minimo riferendosi a tutte le linee spaziali* (non soltanto a quelle che appartengono alla stessa superficie $z = \text{cost.}$, cui conviene limitarsi quando ν dipende anche da z).

Ove si ponga per brevità

$$n - 1 = h^2 - h \,, \tag{9}$$

si ha, per qualsiasi valore reale di h,

$$n = h^2 - h + 1 = (h - {}^1/_2)^2 + {}^3/_4 > 0 \,;$$

inoltre, dalle (7′) e (8′),

$$e^{-\nu} = \left(\frac{r_0}{r}\right)^h \quad , \quad e^{\lambda-\nu} = \left(\frac{r}{r_0}\right)^{n-1} . \tag{10}$$

Dacchè $n > 0$, la funzione r^{n-1} è integrabile a partire da $r = 0$, come si richiede perchè abbia senso la distanza ϱ dall'asse. In modo preciso risulta

$$\varrho = \frac{r^n}{n r_0^{n-1}} . \tag{11}$$

La curvatura geodetica d'una linea isometrica (nel piano $z = \text{cost.}$ cui essa appartiene) è espressa dalla prima delle (5). Si può anzi aggiungere che γ_{313} ci dà la detta curvatura presa positivamente quando la concavità della curva è rivolta nel senso delle r crescenti, negativamente nel caso opposto. *Se si vuole rispecchiare la condizione qualitativa che i circoli geodetici sieno concavi verso il centro* ($r = 0$), *bisognerà ritenere* $\gamma_{313} < 0$. Ora si ha da (5), (7) e (10)

$$\gamma_{313} = -(1 - h)\frac{r_0^{n-1}}{r^n} \,,$$

donde la disuguaglianza

$$h < 1 \,. \tag{12}$$

D'altra parte la flessione Γ (annullandosi γ_{323}) coincide col valore assoluto di γ_{313}. Possiamo quindi ritenere, esprimendo r per ϱ a norma della (11),

$$\Gamma = \frac{1 - h}{n}\frac{1}{\varrho} \,. \tag{13}$$

3. — Curvature e direzioni principali dello spazio corrispondenti ad un potenziale logaritmico.

Dal § 6 della Nota precedente risulta che le linee isometriche sono, per qualsiasi potenziale simmetrico $v(r,z)$, linee principali di curvatura. La corrispondente curvatura principale ω_3 vale

$$\omega_3 = e^{-2(\lambda-\nu)}\,\nabla^0\left(\nu - \log\frac{r}{r_0}\,,\nu\right),$$

il parametro misto ∇^0 riferendosi alla forma euclidea dr^2+dz^2.

Per il potenziale logaritmico si ha in conformità, dalle (10), (7), (9) e (11),

$$\omega_3 = (n-1)\,\frac{r_0^{2(n-1)}}{r^{2n}} = -\,\frac{1-n}{n^2}\,\frac{1}{\varrho^2}\,. \tag{14}$$

Le altre due curvature principali dipendono dai simboli di Ricci α_{11}, α_{12}, α_{22}. Le loro espressioni generali si trovano esplicitate nella Nota precedente. Senza richiamarle materialmente, basterà ora procurarsi i valori delle α_{ik} forniti dalle formule (24) di detta Nota.

Sostituendo in queste formule, per le derivate covarianti v^0_{ik}, da riferirsi alla forma euclidea dr^2+dz^2, le derivate ordinarie, e tenendo conto che a^0_{ik} sono i coefficienti (1 o 0) della forma suddetta, si ha, per le (7), (8) e (9),

$$\alpha_{11} = \frac{h}{r^2} + \frac{2h^3-3h^2}{r^2} + \frac{(h-h^2)\,h}{r^2} = \frac{(1-h)\,(1-n)}{r^2}\,;$$

$$\alpha_{12} = 0 \quad ; \quad \alpha_{22} = \frac{(h-h^2)\,h}{r^2} = \frac{h(1-n)}{r^2}\,.$$

L'annullarsi di α_{12} sta ad indicare che *le linee coordinate r e z sono, al pari delle x_3, linee principali di curvatura.* E le rispettive curvature principali ω_1 e ω_2 si hanno in conformità dividendo α_{11} e α_{22} per i coefficienti di dr^2 e di dz^2 nel dl^2, cioè per $e^{2(\lambda-\nu)} = \left(\frac{r}{r_0}\right)^{2(n-1)}$. Con ciò, tenendo conto della (9), risulta

$$\omega_1 = \frac{(1-h)\,(1-n)}{n^2}\,\frac{1}{\varrho^2}\quad,\quad \omega_2 = \frac{h(1-n)}{n^2}\,\frac{1}{\varrho^2}\,, \tag{15}$$

annullandosi, come deve sempre accadere negli spazî vuoti, la curvatura media $\omega_1+\omega_2+\omega_3$. Dalle (14) e (15) apparisce che *le tre curvature principali sono distinte* (circostanza già rilevata in generale alla fine della Nota precedente); *e tutte inversamente proporzionali al quadrato della distanza geodetica dall'asse.*

4. — Potenziale statico — Forza del campo.

Designando al solito con V^2 il coefficiente di dt^2 nel ds^2 einsteiniano, si ha da (1) e (7')

$$V^2 = V_0^2 e^{2\nu} = V_0^2 \left(\frac{r}{r_0}\right)^{2h},$$

donde il potenziale statico $-\frac{1}{2}V^2$. Questo è funzione della sola r; quindi *la forza è tutta radiale* (si intende diretta secondo le linee r). L'elemento d'arco delle linee r essendo $e^{\lambda-\nu}\,dr$, ossia, a norma della (10), $\left(\frac{r}{r_0}\right)^{n-1} dr$, si ha, per la componente della forza nel senso delle r crescenti,

$$-\frac{1}{2}\frac{dV}{\left(\frac{r}{r_0}\right)^{n-1} dr} = -V_0^2\, h\, \frac{r_0^{n-1}}{r^n}\left(\frac{r}{r_0}\right)^{2h}.$$

Dacchè tale componente è negativa, la forza è diretta *verso l'asse*; mettendo in evidenza la distanza geodetica a norma della (11), si ha per l'intensità F l'espressione

$$F = V_0^2 \frac{h}{n} \cdot \frac{1}{\varrho}\left(\frac{\varrho}{\varrho_0}\right)^{\frac{2h}{n}}, \tag{16}$$

dove

$$\varrho_0 = \frac{r_0}{n} \tag{17}$$

designa evidentemente la distanza geodetica per $r = r_0$.

La (16) mostra che la forza varia proporzionalmente alla potenza $-1 + \frac{2h}{n}$ della distanza geodetica dall'asse.

5. — Prima approssimazione.

Ricordo dalla Nota I [1] (§ 8) che, in prima approssimazione, il ds^2 che conviene ad un campo newtoniano di potenziale $-V_0^2\gamma$, dove V_0 rappresenta la velocità della luce in quei posti del campo in cui $\gamma = 0$ [2], ha la forma

$$V_0^2(1 + 2\gamma)\,dt^2 - (1 - 2\gamma)\,dl_0^2 \tag{18}$$

con dl_0 euclideo.

[1] In questi Rendiconti, vol. XXVII (2° sem. 1917), pp. 307-317.

[2] A vero dire, nella citata Nota I, si fa l'ipotesi specifica che γ si annulli all'∞ e che ivi la velocità della luce V_0 abbia il valore c che le compete in assenza d'ogni circostanza perturbatrice.

Dalle (1) e (2) apparisce che, in corrispondenza ad un generico potenziale simmetrico $v(r, z)$, il ds^2 rientra nel tipo (18), purchè v (che è un puro numero) si possa trattare come una piccola quantità del prim'ordine, e λ riesca addirittura trascurabile. In tale ipotesi infatti

$$e^{2v} = 1 + 2v \quad , \quad e^{2(\lambda - v)} = 1 - 2v \, ;$$

e si ha da (2)

$$dl^2 = (1 - 2v)\,(dr^2 + dz^2 + r^2\, dx_3^2),$$

il secondo fattore costituendo appunto un dl_0^2 euclideo (riferito a coordinate cilindriche) donde, per (1),

$$ds^2 = V_0^2(1 + 2v)\, dt^2 - (1 - 2v)\, dl_0^2 .$$

La coincidenza colla (18) è manifesta, purchè *si identifichi* v con γ e V_0 *col valore della velocità della luce* per $v = 0$, il che è quanto dire, badando alla (7'), *per* $r = r_0$.

6. — Attrazione di un cilindro omogeneo.

Se si prende per v il potenziale logaritmico $h \log \frac{r}{r_0}$, la condizione che tale quantità possa considerarsi piccola di prim'ordine è evidentemente soddisfatta le quante volte sia tale la costante h (che, in virtù della (12), è in ogni caso una frazione propria): ciò, ben si intende, purchè r sia abbastanza discosto da 0 e ∞ da poter trattare $\log \frac{r}{r_0}$ come quantità finita. Sotto queste stesse ipotesi $\lambda = h^2 \log \frac{r}{r_0}$ risulta senz' altro trascurabile, come si richiede per l'applicabilità delle formule di prima approssimazione.

Ciò posto, riportiamoci agli elementi della teoria dell'attrazione newtoniana. Un cilindro circolare, indefinito, omogeneo, agisce nei punti esterni come se tutta la massa fosse distribuita uniformemente sull'asse con la stessa densità μ per unità di lunghezza. Detta r la distanza dall'asse e f la costante d'attrazione, si ha il potenziale

$$2f\mu \log \frac{1}{r} + \text{cost.}$$

Specificando la inessenziale costante additiva, si può ritenere per tale potenziale l'espressione

$$2f\mu \log \frac{r_0}{r} \, ,$$

che diviene manifestamente identificabile con

$$- V_0^2 v = V_0^2 h \log \frac{r_0}{r} \, ;$$

basta assumere

$$h = \frac{2f\mu}{V_0^2} . \tag{19}$$

A V_0 si può, senza errore sensibile, sostituire il valore limite c. Si ha quindi, in unità C. G. S.,

$$V_0 = c = 3 . 10^{10} \quad , \quad f = 6{,}7 . 10^{-8} ,$$

e ciò porge

$$h = 2 \frac{6{,}7}{9} 10^{-28} \mu , \tag{19'}$$

la densità lineare μ dovendosi ritenere espressa in grammi per centimetro. Di qua si rileva intanto che, per ogni distribuzione realizzabile con masse ordinarie, è esuberantemente verificata l'ipotesi preliminare che h si possa trattare come quantità di prim'ordine. Sotto tale ipotesi, si ha dalla (9) $n = 1 - h$; e, sempre a meno di termini di secondo ordine, $\frac{h}{n}$ si riduce ad h. In conformità l'espressione (16) della forza, tenuto conto della (19), assume l'aspetto

$$\frac{2f\mu}{\varrho} \left(\frac{\varrho}{\varrho_0} \right)^{2h} .$$

Il primo fattore corrisponde evidentemente all'attrazione newtoniana esterna di un cilindro omogeneo (dello spazio euclideo) alla distanza ϱ dall'asse. Il secondo fattore (assai prossimo all'unità) $\left(\frac{\varrho}{\varrho_0} \right)^{2h}$ costituisce la *correzione statica* dovuta alla teoria di Einstein. L'alterazione geometrica dello spazio ambiente, già esplicitata in generale a § 3, dà luogo, trascurando nelle (15) e (16) i termini di secondo ordine in h, ai seguenti valori delle curvature principali:

$$\omega_1 = -\frac{h}{\varrho^2} \quad , \quad \omega_2 = 0 \quad , \quad \omega_3 = \frac{h}{\varrho^2} .$$

Dacchè ω_1 , ω_2 , ω_3 appartengono rispettivamente alle giaciture $r = \text{cost.}$, $s = \text{cost.}$, $x_3 = \text{cost.}$, si conclude che, nella distorsione dello spazio, provocata dalla presenza di un cilindro materiale (circolare, indefinito, omogeneo), la curvatura riemanniana resta nulla nelle giaciture normali all'asse, mentre assume il valore positivo $\frac{h}{\varrho^2}$ per le giaciture meridiane, e il valore opposto $-\frac{h}{\varrho^2}$ per le giaciture tangenti ai cilindri coassiali.

Vulcanologia. — *Sui vulcani Cimini.* Nota del Socio Carlo Viola.

Quell'importante regione vulcanica dell'Italia centrale che prende il nome di Cimini, è un intreccio di terreni eocenici, pliocenici, quaternarî e di rocce eruttive tale che per dipanarne le età e la successione occorrono anni di escursioni di ricerche e di studî diligenti. Si viene a questa conclusione percorrendo la regione tra le difficoltà del terreno e rievocando le contraddizioni in cui sono caduti diversi osservatori. Anche la classificazione delle numerose varietà di rocce effusive di questa regione presenta non lieve difficoltà, principalmente perchè corredate di poche analisi chimiche, eseguite con metodi diversi, alcune incomplete o di diversa esattezza. Il R. Ufficio geologico affidando all'ing. V. Sabatini l'incarico di studiare questa regione vulcanica ha fatto bene di lasciargli piena libertà senza limitazione di tempo; ma forse ne avrebbe avuto maggior vantaggio se non avesse lesinato sulle analisi chimiche, essendo il contenuto chimico la base della sistematica. E il Sabatini pari all'incarico avuto ha fatto uno studio assai completo, assai minuzioso, assai esteso di questa regione vulcanica interessante, considerandola da molteplici punti di vista, e continuerò con Lacroix dicendo: « Egli ha voluto fare una monografia completa quanto era possibile, e vi è riuscito perfettamente ». Onde il lavoro sui vulcani Cimini presenta tutti i dati che si riferiscono ai problemi ad essi relativi e merita piena fiducia (1).

In vista di ciò mi accingo al seguente riassunto critico, avvertendo che molte affermazioni del Sabatini ho voluto controllare con osservazioni mie sul terreno.

La prima parte di questo lavoro fondamentale si inizia con lo studio del basamento sedimentario dei due vulcani Cimini. Questo basamento è costituito dall'eocene, dal pliocene e dal quaternario. La questione relativa alla presenza del miocene, su cui i geologi non sono stati concordi, dà luogo alla prima discussione importante sul calcare conchiglifero di Villa Ravicini e dell'Arcionello, in cui Carlo De Stefani aveva creduto scoprire dei lembi del miocene. Il miocene fu ripetutamente affermato in questa regione da autori diversi; ma Sabatini ritenne, a ragione, i detti calcari pliocenici, anzi dell'alto pliocene e sincroni del « macco » del litorale romano. Giovanni Di Stefano, geologo e paleontologo di altissimo valore, diede un giudizio sicuro per i detti calcari, e fu con ciò in pieno accordo con Sabatini nel negare il

(1) V. Sabatini, *I vulcani dell'Italia centrale e i loro prodotti.* Parte II. Roma, 1912.

miocene, come risulta da una Nota pubblicata insieme dai detti autori e riassunta nel volume sui vulcani Cimini (1).

Con ciò è risolto l'errore in cui è caduto il De Stefani; e col miocene di Viterbo è sepolto anche quello dell'argilla della Tolfa, già ammesso erroneamente da diversi autori. I giacimenti della Tolfa entrano appunto col loro estremo lembo orientale nella carta geologica annessa al volume sui Cimini del Sabatini. Accennerò poi all'importantissima discussione sulle ghiaie che sottostanno alle formazioni vulcaniche dei Cimini e della Tolfa e sui criterî per distinguere in esse quelle dell'alto pliocene da quelle del quaternario, in cui si trovano sabbie vulcaniche (già scarsamente comparse nelle precedenti) oltre ad una cementazione per opera di acque cariche di calcare e di anidride carbonica. In questo modo appariscono i travertini, ora come impregnazione nelle ghiaie, ora in giacimenti intercalati alle ghiaie cementate e che continueranno ad intercalarsi alle formazioni vulcaniche seguenti, e ad essi si sovrapporranno, arrivando a deporsi anche oggi sotto i nostri occhi. Inoltre le acque anzidette produrranno fenomeni pseudoeruttivi, dei quali uno notevole sussiste ancora nella *maccaluba di Bassano in Teverina*, descritta pel primo da Sabatini stesso (2).

Riepilogando, il basamento sedimentario dei Cimini è costituito da calcari e arenarie eoceniche, da argilla con sabbie e ghiaie intercalate e coronate da calcari conchigliferi e quindi da altre ghiaie e sabbie con pochi elementi vulcanici del pliocene. Chiude la serie il quaternario con alluvioni di ciottoli e con travertini. Su questo basamento si deposero le formazioni vulcaniche, che sono dapprima i peperini cimini, dimostrati da Sabatini essere sincroni delle rocce trachitiche della Tolfa e dell'Amiata. La loro provenienza da un magma unico viene poi pienamente dimostrata nella seconda parte del volume, mercè dell'analisi microscopica e dei relativi *magma elementari*.

È questa la famiglia delle *necroliti*, nettamente quaternarie. Circa la roccia della Tolfa, contrariamente a quanto affermarono i fautori del miocene, essa poggia su formazioni plioceniche confermate da Giovanni Di Stefano. La discussione sul peperino è lunga ed esauriente. Diversi autori erano rimasti incerti sulla sua natura, ed arrivarono a conclusioni contraddittorie, persino Washington lo ritenne prima tufo, poi lava. L'inganno derivò da una mascheratura secondaria, che spesso si manifesta in tutti i fenomeni naturali. Sabatini fece su questo soggetto molteplici ricerche, e io credo perciò che le sue conclusioni godano piena fiducia; egli raccolse i caratteri della roccia, li mise a raffronto, ne spiegò l'apparente contraddizione, e dimostrò la natura tufica della roccia stessa. Non escludo che altri osservatori po-

(1) Bollettino Comitato geologico 1899.

(2) V. Sabatini, *La Maccaluba di Bassano in Teverina*. Boll. com. geol., 1907.

tranno aggiungere nuovi elementi alla discussione, ma la natura del peperino tipico rimane acquisita alla geologia. Gli inclusi poi di questa roccia sono, nella massima parte, falsi inclusi, dovuti alla alterazione meno avanzata; ciò risulta da numerose osservazioni, minuziose ed esatte, consegnate nel volume in esame. Un'altra roccia vulcanica, anteriore al peperino tipico, ha qualche analogia con questa, e ne fu separata col nome di *peperino delle alture*. La distinzione dei due peperini è certamente fondamentale per la rappresentazione di fasi diverse dell'attività vulcanica costruttrice. Il peperino delle alture sembra una lava e tale fu sempre ritenuto, ma circa la sua vera natura l'autore solleva serî dubbî, che si trovano poi sviluppati in una nota posteriore (1)

L'autore passa quindi a parlare delle lave distinguendo le *non leucitiche* dalle *leucitiche*. Di tutte dà i caratteri macroscopici, delimita le colate, fa le valutazioni volumetriche. Quest'ultima ricerca ch'egli estende anche ai tufi, si era già iniziata sulle lave del vulcano laziale, in quella parte dell'opera del Sabatini che precede il volume sui vulcani Cimini (2). È una ricerca che non ha soltanto un'importanza in sè, ma che è la continuazione di un buon metodo per dimostrare l'inesistenza dei grandi sprofondamenti vulcanici, almeno nella maggior parte dei casi. Segue la descrizione delle formazioni tufiche (oltre il peperino descritto a parte come si è visto) con un primo tentativo di classificazione di queste rocce. Notevole pure è lo studio delle azioni erosive sui tufi e sulle lave. L'autore segue tali azioni dalle semplici spaccature fino alla divisione a palle, e dei diversi stadî di tale processo dà delle bellissime fotografie. Un lungo capitolo potrebbe comporsi con i gruppi di sezioni geologiche disseminati in questa prima parte, e dai medesimi l'autore deduce con molta chiarezza la successione cronologica delle eruzioni cimine, che vengono poi riassunte in un quadro. E quindi con sintesi serrata l'autore tesse la storia dei due vulcani, del vulcano *andesitico* del Cimino propriamente detto e del vulcano *andoleucotefritico* di Vico. Questa serie si chiude con lo studio delle manifestazioni attuali, che dalle sorgenti calde vanno fino alle eruzioni fangose della *Maccaluba* di Bassano in Teverina, e si chiude così anche la parte geologica dello studio sui Cimini, condotto con mirabile unità, a raggiungere la quale tutti i singoli particolari sono ad essa coordinati; onde non è a meravigliarsi se a questo proposito Brögger scrive che « questo lavoro conserverà il suo valore ancora « quando saranno seppelliti i criterî litologici sui quali esso si basa, e che « sono mutevoli ».

(1) *Lave che sembrano tufi e tufi che sembrano lave.* Congresso della Società geologica italiana, settembre 1911.

(2) V. Sabatini, *I vulcani dell'Italia centrale e i loro prodotti.* Parte I, Roma, 1900.

Se le osservazioni sul terreno sono importanti per lo studio della regione, atteso che ogni studio geologico di qualsiasi genere incomincia sempre con tali osservazioni, di gran lunga più importanti sono le osservazioni petrografiche, consegnate nella seconda parte del volume. Sono ripresi i due peperini; peperino tipico e peperino delle alture, la cui distinzione è fondamentale, come si disse, per la rappresentazione di fasi diverse dell'attività vulcanica costruttrice. I *fenocristalli* del peperino tipico sono principalmente di mica nera, di augite, di ipersteno e di feldispati, sulla cui determinazione possiamo fidarci per due ragioni: prima perchè le misure sono eseguite generalmente su sezioni aventi date orientazioni, sia col metodo di eguale illuminazione, sia coi metodi ordinari; in secondo luogo perchè le numerose misure eseguite sullo stesso soggetto sono controllabili a vicenda. Altrettanto dicasi della *massa* del peperino, che serve a controllare la determinazione fatta sul terreno della natura tufica della roccia. Azioni secondarie mascherano ordinariamente la natura sua; ma l'apparente fluidalità viene spesso in aiuto col mostrare brusche interruzioni sulla sua direzione e bruschi passaggi dalle parti fluidali a quelle non fluidali; così pure è degno di essere rilevato l'accordo fra la natura dei pseudoinclusi, quale è osservabile sul terreno e quale risulta dallo studio al microscopio. Da questo studio comparativo è messa in rilievo nettamente e nuovamente la natura tufica del peperino tipico: mentre nei lavori precedenti di altri autori si incontrano solo opinioni, e non di rado contradditorie fra di loro.

Circa la natura del peperino delle alture, le difficoltà sono anche maggiori e dovute alla alterazione della sua *massa*. Per questa ragione l'autore ebbe di mira di raccogliere copiosi argomenti, che si rendono necessarî per una discussione approfondita. Da un lato infatti apparisce la stretta simiglianza microscopica con la roccia precedente, che è tufo, dall'altro emerge il carattere macroscopico di natura lavica; di più l'autore dimostra che le lave e i tufi non sono due tipi distinti di rocce, poichè esistono fra essi tutti i passaggi da tufo a lava. Ricordiamo per esempio lo stato di frantumazione e di vera triturazione delle lave in certi punti al momento della loro emissione, e in altri la perfetta continuità della lava, come osserva giustamente il Sabatini.

Mi pare interessante notare il paragone di queste roccie col piperno dei campi Flegrei; specialmente perchè trovo qui per la prima volta dimostrata la natura lavica di questa ultima roccia, mentre altri autori la mettono in dubbio per la stretta analogia di simiglianza con certe forme di peperini. Ancora più importante è vedere risultare dal lavoro dell'autore la identità del peperino con le rocce dell'Amiata e della Tolfa, identità che viene inoltre confermata nel capitolo delle classificazioni magmatiche. Altri autori vorrebbero qui attribuirsi la priorità mentre non hanno fatto altro che

esprimere delle opinioni. Naturalmente alle conclusioni del Sabatini non si potrebbe arrivare senza la minuziosa precisione con cui sono determinati gli elementi del peperino. Le roccie eruttive propriamente dette sono le lave non leucitiche e le lave leucitiche; quelle comprendono le trachiti, le trachioligoclasiti con passaggio alle oligoclasiti di S. Lucia, di Loreto, della Quercia; le oligoclasiti, le oligolabradoriti con passaggio alle labroligoclasiti di Montecchio, di Monte Torello, della Cima di Monte Cimino, della Trinità, e le labradoriti della Montagna vecchia. La *vetrallite*, ossia la Vulsinite di Washington, sta a capo delle trachioligoclasiti; dalla descrizione completa di questa roccia risulta che trattasi di una forma speronacea per l'ingiallimento dei pirosseni (passaggio all'egirina) dovuto ad arricchimento di soda, come dimostrano le analisi chimiche. Notevole e complessa è la costituzione delle oligotrachiti nelle parti meridionali del cratere Vicano, contenenti sanidina e feldispati triclini dall'albite all'anortite. Una forma di piperno fu rinvenuta con la trachioligoclasite di Caprarola. La Ciminite di Washington è risultato essere una oligoclasite ricca di olivina nei fenocristalli e con feldispati generalmente basici. Le altre forme di queste lave delimitate sul terreno non hanno la stessa importanza; il lettore le vedrà descritte nel rispettivo capitolo con precisione. Le lave più basiche che si trovano a Montecchio, a Monte Torello e in Cima al Cimino, con zircone, olivina e ipersteno, chiudono la serie delle lave non leucitiche in sito.

Certe rocce erratiche conosciute dai precedenti autori come fonoliti, sono invece fonotefriti, che l'autore determina con precisione. Esse contengono haüina, e possono essere poste al principio della serie eruttiva del vulcano di Vico, con sufficiente probabilità.

Ampiamente trattate sono le lave leucitiche, che l'autore divide in tipi acidi e tipi basici, quelli comprendenti le leucofonoliti e le leucotefriti acide, questi le leucotefriti basiche. Ognuno di questi tipi si presta ad una sottodivisione, non scientifica, ma pratica e utile per l'industria, secondo la grandezza delle leuciti che variano circa da un massimo di 2 cm. a un minimo inferiore a 0,01 mm. Le leucotefriti con grandi e medie leuciti sono sfruttate dall'industria per la produzione di potassa e allume.

In queste rocce è stato notato un minerale verde simile al pirosseno, che da altri Autori fu come tale riconosciuto. Ma si tratta invece di uralitizzazione del pirosseno come risulta esaurientemente dallo studio del Sabatini. Le leuciti del secondo tempo di certe leucotefriti dette « petrisco » non furono riconosciute da molti, perchè alteratissime, e quindi fu sbagliata la determinazione di questa roccia, che ora Sabatini ha definito.

Dirò in ultimo una parola sui tufi della regione, di cui l'autore dà una classificazione metodica. Basandosi sugli inclusi, i tufi cimini sarebbero andesitici e leucotefritici, perchè naturalmente i frammenti lavici in essi contenuti appartengono alle due categorie di roccie; e basandosi sulla massa

fondamentale occorre distinguere i tufi andesitici dai tufi leucotefritici, risultando dimostrato dall'autore che tale massa è autogena.

Fra i tufi leucotefritici, quello con scorie nere è il più importante, sia per estensione, sia perchè segna un notevole momento nelle manifestazioni cimine, con la demolizione del grande cono Vicano e con l'allargamento del suo cratere, come risulta dimostrato già nella prima parte della Memoria. È questo un materiale largamente adoperato come pietra da costruzione; ad esso principalmente sono associati i giacimenti di pozzolana. Le scorie nere contenute in questi tufi sono bombe e frammenti di bombe leucotefritiche, le quali quando scendono a piccole dimensioni sono alterate e ingiallite per ossidazioni di sali ferrosi.

Per la comprensione sintetica delle rocce eruttive si richiede una classificazione magmatica, che trovò grande seguito fra i petrografi esteri, e che rimase trascurata da noi, onde l'autore si accinse a tentare questo compito senza dissimularsi l'incertezza dei risultati ottenuti, benchè in essi non manchino notevoli controlli fra le ricerche sul terreno, le osservazioni al microscopio e le analisi chimiche.

Se l'autore cerca di spiegare in tal modo le relazioni fra i prodotti eruttivi del Vulcano di Vico e quelli del Cimino, non tralascia tuttavia di discuterne i risultati opponendovi le possibili obbiezioni, affinchè l'attenzione non si discosti dai *fatti d'osservazione, a questi essendo principalmente dedicata la monografia, e mutevoli essendo le teorie.*

Nemmeno a me sembra che i risultati finora ottenuti nel campo speciale della chimica fisica sulla cristallizzazione dei magma eruttivi a diverse temperature e pressioni siano applicabili allo studio delle rocce espansive e chiariscano l'analogia esistente fra rocce di due diversi centri eruttivi, sia pure vicini. « È certo » — osserva giustamente Lacroix — « che la « chimica fisica avrà in avvenire voce assai importante nello studio dei « magma eruttivi, *ma finora questi dati sono ben incerti,* e devono essere « utilizzati con grande prudenza nelle speculazioni teoriche della petrografia ».

Il lettore troverà una apparente contraddizione in riguardo alla classificazione adottata dal Sabatini, che è la francese, mentre gli stessi petrografi francesi seguono la sistematica americana. È indubitato che il contenuto chimico deve essere la base di una sistematica razionale delle rocce, ma non si può disconoscere che la struttura e il contenuto mineralogico non ne siano dei fattori essenziali. Solamente per la sistematica americana si richiedono analisi chimiche *numerose e complete con la separazione del ferro ferroso dal ferro ferrico.* Chi non dispone di un tal materiale in una regione vulcanica che se è relativamente ristretta è ricca di varietà litologiche, deve rinunziare alla classificazione americana per non trovarsi con intere famiglie di rocce prive di analisi chimiche; ma può seguire la classificazione francese, la quale

non avendo bisogno di separare il ferro ferroso dal ferro ferrico permette di utilizzare anche le analisi in cui tale separazione non è fatta.

Bisogna purtroppo confessare che la sistematica americana delle rocce non ha avuto quella benevole accoglienza fra i petrografi d'Europa, che dovevasi attendere, stante l'alto pregio dei principî su cui si basa. Si è cercato di spiegare questa attitudine verso la scuola americana, attribuendone la colpa alla poco felice nomenclatura, e alla illusione che la sola composizione chimica elementare possa essere sufficiente per la classificazione delle rocce. Ora se da numerose pubblicazioni emerge che la nomenclatura è un carattere puramente accessorio della classificazione americana, e può essere sostitutita da qualsiasi altra, senza che la sistematica perda il suo principio fondamentale; si vede in secondo luogo che Washington (1), valendosi di migliaja e migliaja di osservazioni microscopiche, ha dimostrato essere il contenuto chimico delle rocce collegato con determinati nuclei magmatici (norme) quando la cristallizzazione avviene in modo normale. Cosicchè per rocce normali la sistematica americana si basa sulla composizione chimica elementare e sul contenuto mineralogico. Rocce non normali possono essere classificate con rocce normali se il loro contenuto chimico è lo stesso. La storia geologica di una regione eruttiva acquista speciale importanza quando ad uno stesso magma corrispondono rocce con contenuto mineralogico diverso, perchè ciò dipende dalle variazioni di temperatura e pressione durante il consolidamento del magma. Questo importante problema sarà forse completamente risoluto quando la chimica fisica avrà raccolto maggiori dati sperimentali di quanto ora non possieda; *per ora esso è avvolto in speculazioni teoriche, che il petrografo deve evitare.* Una eventuale discussione futura sarà fatta su dati di osservazione più numerosi ed esatti, e della loro raccolta il lavoro sui Cimini è un primo luminoso esempio. Ed è indifferente per chi voglia seguire sul terreno lo studio pregevole del Sabatini l'aver egli adottata la classificazione di Michel Levy piuttosto che quella americana, o quella di Rosenbusch con le rispettive considerazioni magmatiche e le differenziazioni che ne conseguono. L'importante è che egli ha tenuto conto dei risultati di Washington e li ha messi in paragone con le proprie osservazioni, di cui ho già parlato. E ciò perchè non si trattava di sviluppare delle teorie o di penetrare in speculazioni petrografiche che non potevano trovare posto in una monografia quale è quella di cui io parlo, e che uscirebbero dal compito prefissosi dal Sabatini, il quale invece è riuscito completo *per quanto era possibile.* Per questa ragione io mi associo in tutto ai giudizi di W. C. Brögger, mineralogista e petrografo di Cristiania, che riporto integralmente per far conoscere all'Accademia quanto i lavori italiani siano apprezzati all'estero.

(1) H. S. Washington, *A description of the quantitative classification of igneus rocks* etc. Washington, 1918.

« Le ricerche del Sabatini intorno ai Vulcani Cimini sono a mio pa-
« rere, consegnate in un lavoro di grande pregio, il cui valore sta soprattutto
« nell'esame particolareggiato, multiforme e straordinariamente completo del
« piccolo territorio interessantissimo dei vulcani dell'Italia centrale. La de-
« terminazione esatta dell'età e della successione delle singole eruzioni, le
« ricerche eseguite con minuziosa cura, petrografiche e chimiche, dei singoli
« prodotti delle due bocche eruttive ciminiche, offrono senza alcun dubbio
« un materiale copioso per comprendere le relazioni genetiche e magmatiche
« bene precisate delle rispettive rocce, e per costruire il vero meccanismo
« eruttivo, se mai questo sarà possibile un giorno ».

« Le nuove eccellenti osservazioni geologiche e petrografiche del Saba-
« tini dànno al suo lavoro un alto e duraturo valore, e i rispettivi risultati
« rimarranno acquisiti alla scienza ».

« Io non credo si possa dare oggi una spiegazione in certo modo plau-
« sibile delle relazioni di analogia fra i prodotti eruttivi di due piccoli
« vulcani. Ma per ciò che riguarda il valore della presente opera, poco
« monta se l'autore nell'ultimo capitolo traccia (in relazione con una ipotesi
« di Michel Levy) un tentativo in questo senso, a cui non posso associarmi.
« Comunque sia di ciò, il lavoro del Sabatini mantiene tutto il suo pregio,
« grazie alla lucidità, con la quale è tessuta l'intera storia delle eruzioni
« dell'interessante regione vulcanica ».

Finalmente è degno di essere rilevato l'accordo tra le osservazioni sul terreno, le analisi chimiche e la parte fondamentale della classificazione magmatica come risulta dal diagramma della tav. XVI. Da essa si vede che le rocce dei Cimini formano una *provincia petrografica* al pari di quelle dei Laziali, della Tolfa e dell'Amiata; e noterò ancora l'esattezza della carta geologica da me controllata in alcune escursioni fatte appositamente.

Matematica. — *A proposito di una Nota del sig. A. Vergerio.* Nota di Leonida Tonelli, presentata dal Socio S. Pincherle.

Il sig. A. Vergerio, nella sua Nota *Sulla derivazione per serie* (1), ha voluto occuparsi di alcuni risultati da me stabiliti nelle Note: *Successioni di curve e derivazione per serie*, pubblicate nei Rendiconti di questa illustre Accademia (2).

(1) Rend. della R. Acc. dei Lincei, 1916, 2° sem., pp. 65-68. La pubblicazione di questa Nota è avvenuta quando io ero già alla fronte, a compiere il mio dovere di cittadino e di soldato. Dalla fronte torno soltanto ora, per riprendere l'insegnamento e quindi anche gli studî da lungo tempo abbandonati; e soltanto ora prendo visione del lavoro del sig. Vergerio. Ciò spiega il ritardo con cui escono questi miei rilievi.

(2) 1916, 1° sem., pp. 22-30 e 85-91.

Egli scrive, a pag. 65, che io sarei riuscito « a dimostrare (sono parole sue) un teorema che può enunciarsi così:

Supposto:

1°) *che la* $\sum_1^\infty n_n(x)$ *converga in* (a, b), *quasi dappertutto verso una funnione* $n(x)$;

2°) *che tanto la* $n(x)$ *quanto la* $n_n(x)$ *siano funzioni a variazione limitata nel detto intervallo*;

3°) *che la serie delle derivate (considerate là dove esistono)* $\sum_1^\infty n'_n(x)$ *sia quasi dappertutto convergente*;

sarà, quasi dappertutto, $n'(x) = \sum_1^\infty n'_n(x)$ ».

Aggiunge poi, in nota a piè della pag. 66: « Il Tonelli nella Nota II (*Successioni di curve* ecc.) s'era proposto di dimostrare che la 3ª condizione posta nel suo teorema è affatto superflua perchè conseguenza delle altre due; che si può cioè prescindere dall'ipotesi sulla convergenza delle serie derivate. Il suo teorema però, così modificato, cessa di essere vero; per convincersene, basta ricordare il classico esempio di Abel: la serie

$$\frac{\pi - x}{2} = \sum_1^\infty \frac{\sin nx}{n}$$

soddisfa alle condizioni 1ª e 2ª del suo teorema; ciò nondimeno, la serie delle derivate $\sum_1^\infty \cos nx$ è divergente! »

Questo è quanto scrive il sig. Vergerio; e il lettore potrà per soprappiù osservare che non è vero neppure il teorema di cui sopra ho riportato l'enunciato e che il sig. Vergerio ritiene esatto (1).

Se non che è assolutamente falso che io abbia tentato di dimostrare ed anche semplicemente che io abbia enunciate le proposizioni che il sig. Vergerio mi attribuisce.

(1) Basta, infatti, considerare il seguente esempio. Sia la funzione $n_n(x)$ definita nel seguente modo:

$$n_n(x) = \frac{r-1}{n} \quad \text{nell'intervallo} \quad \frac{r-1}{n} \leq x < \frac{r}{n} \quad (r = 1, 2, \ldots, n),$$
$$n_n(x) = 1 \quad \text{per} \quad n = 1.$$

È evidente: 1°) che la funzione $n_n(x)$ converge uniformemente, su tutto l'intervallo $(0, 1)$, verso la funzione $n(x) = x$; 2°) che tanto la $n(x)$ quanto la $n_n(x)$ sono funzioni a variazione limitata in $(0, 1)$; 3°) che la derivata $n'_n(x)$ esiste quasi dappertutto ed è uguale a zero, e che pertanto $n'_n(x)$ converge quasi dappertutto, per $n \longrightarrow \infty$, allo zero; 4°) che, ciò nondimeno, essendo sempre $n'(x) = 1$, la $n'_n(x)$ *non converge* quasi dàppertutto, per $n \longrightarrow \infty$, alla $n'(x)$.

I due teoremi da me *veramente enunciati e dimostrati* (e che nessuno ancora ha mostrato non esser veri) sono i seguenti:

a) *Supposto*:

1°) *che la successione di funzioni, date su* (a, b), $n_1(x)$, $n_2(x)$, ... $n_n(x)$, ... *converga quasi dappertutto verso una funzione* $n(x)$;

2°) *che la lunghezza della curva* $y = n_n(x)$ *tenda a quella, supposta finita, di* $y = n(x)$;

3°) *che la successione delle derivate* (*considerate là dove esistono*) $n'_1(x)$, $n'_2(x)$, ..., $n'_n(x)$, ... *sia quasi dappertutto convergente*;

è quasi dappertutto $\lim_{n \to \infty} n'_n(x) = n'(x)$ [loc. cit. (²), pag. 22].

b) *Se la successione di funzioni* $n_1(x)$, $n_2(x)$, ..., $n_n(x)$, .., , *date in* (a, b), *converge quasi dappertutto verso una funzione* $n(x)$; *se, inoltre, la lunghezza, supposta finita, della curva* $y = n_n(x)$ *tende a quella, pure finita, di* $y = n(x)$; *allora la successione delle derivate* $n'_1(x)$, $n'_2(x)$, ..., $n'_n(x)$, ..., *considerate solamente là dove esistono, converge in misura verso la derivata* $n'(x)$ [loc. cit. (²), pag. 85].

Confrontando questi enunciati con quelli che mi attribuisce il sig. Vergerio, risulta che il detto signore ha sostituito alla condizione:

« che la lunghezza della curva $y = n(x)$ tenda a quella, supposta finita, della $y = n(x)$ »;

l'altra:

« che tanto la $n(x)$ quanto la $n_n(x)$ siano funzioni a variazione limitata ».

Ora tutti sanno che queste due condizioni *non sono equivalenti*, perchè la seconda può essere soddisfatta senza che lo sia la prima. Ed ecco perchè le due proposizioni da me dimostrate vengono trasformate dal sig. Vergerio in due altre non vere.

Osservo inoltre che, a proposito del teorema *b*), il sig. Vergerio ha anche sostituito la *convergenza*, della $n'_n(x)$ alla $n'(x)$, alla *convergenza* in *misura*; ed è ben noto che ciò è tutt'altro che lecito.

Biologia generale. — *Variabilità del rapporto dei sessi alla nascita nelle covate di alcuni mammiferi pluripari.* Nota I del dott. MARCELLO BOLDRINI, presentata dal Corrisp. D. LO MONACO.

Gli studî sulle variazioni individuali della fecondità, ormai abbastanza numerosi, hanno rivelato come spesso esse non dipendano esclusivamente dal caso, ma presentino modalità atte talora a lumeggiare qualcuno dei più interessanti problemi di biologia. Ci è parso, per ciò, che potesse riuscire non del tutto priva di importanza la rielaborazione dei dati relativi al rapporto dei sessi nelle covate di alcuni animali pluripari raccolti da varî autori e dai quali forse non ne erano stati lumeggiati tutti gli aspetti.

Le nostre elaborazioni riguardano i conigli (dati di Russo e di Basile), i topi comuni (dati di Copman e Parsons), i topi bianchi (dati di Schultze) e sono condotti col metodo con cui una parte di essi è stata trattata dal Gini in un suo notissimo libro [1], tenendo conto delle variazioni e degli svolgimenti che l'autore stesso ne ha fatto.

* * *

Esponiamo brevemente il procedimento impiegato per la ricerca.

Se p è la probabilità di una nascita maschile desunta da un certo numero di covate e supposta come media, e $c = 1 - p$ la probabilità contraria, cioè la probabilità di una nascita femminile, s_1 il numero delle covate con n_1 nati, l'errore quadratico medio teorico, cioè l'errore che dovrebbe attendersi per puro effetto del caso, sarà:

$$r'_1 = 1\sqrt{\frac{pq}{n_1}}.$$

Analogamente, per s_2 covate con n_2 nati ciascuna l'errore sarà:

$$r''_1 = 1\sqrt{\frac{pq}{n_1}}.$$

[1] A. Russo, *Modif. sper. all'elemento epiteliale dell'ovaia dei mammiferi.* Mem. Acc. Lincei, serie 5ª, vol. VI, 1907; C. Basile, *Influenza della lecitina sulla determinazione del sesso e sui caratteri mendeliani.* Atti Acc. Lincei, Classe scienze fis. e nat., vol. XVII, 1908; S. Copman e F. G. Parsons, *Observations on the sex of the mice.* Proceedings of the Royal Society of London, 1904; O. Schultze, *Zur Frage von der Geschlechtsbildenden Ursachen.* Archiv für mikroskopischen Anatomie, 1904; C. Gini, *Il sesso dal punto di vista statistico.* Palermo, 1908, pag. 382.

Per un certo numero di covate $s_1 + s_2 + \ldots = g$ aventi complessivamente $s_1 n_1 + s_2 n_2 \ldots = N$ nati, l'errore quadratico medio teorico sarà:

$$(1) \qquad r_1 = \sqrt{\frac{pq}{g}\left(\frac{s_1}{n_1} + \frac{s_2}{n_2} + \cdots\right)},$$

L'altro canto, se $d_1 . d_2 \ldots$ sono gli errori riscontrati fra il rapporto sessuale assunto come tipico e i rapporti sessuali delle s_1 covate aventi n_1 nati, l'errore quadratico medio empirico, indicando con Σ la somma, sarà:

$$r'_2 = \sqrt{\frac{\Sigma d^2_{s1}}{s_1}}.$$

Analogamente, per le s_2 covate aventi n_2 nati, sarà:

$$r''_2 = \sqrt{\frac{\Sigma d^2_{s2}}{s_2}}.$$

Per tutte le $s_1 + n_2 + \ldots = g$ covate, aventi $n_1 + n_2 + \ldots = N$ nati, l'errore quadratico medio empirico sarà:

$$(2) \qquad r_2 = \sqrt{\frac{\Sigma d^2_g}{g}}.$$

Poichè come probabilità teoriche sono necessariamente assunti i rapporti che si ottengono da un numero limitato di osservazioni, il che, come si dimostra, rende i valori della (1) e della (2) inferiori a quelli che si avrebbero se le probabilità fossero ricavate da un numero illimitato di osservazioni, è conveniente sostituire a quelle le formule seguenti:

$$(3) \qquad r_1 = \sqrt{\frac{pq}{q}\left(\frac{s_1}{n_1} + \frac{s_2}{n_2} + \cdots\right)\frac{N}{N-1}}$$

$$(4) \qquad r_2 = \sqrt{\frac{\Sigma d^2_g}{g-1}}$$

in cui la correzione avrà tanto minor peso quanto maggiori saranno i valori di N e di g.

Il rapporto

$$(5) \qquad V = \frac{r_2}{r_1}$$

viene assunto come indice di variabilità e potrà, nei varî casi, esser uguale o diverse dall'unità. Il valore di V sarà uguale a uno quando non c'è alcuna variabilità individuale nel rapporto dei sessi nelle covate che non sia impu-

tabile al caso, minore o maggiore di uno quando l'individualità dei genitori tende a produrre in misura maggiore o minore di quanto dovrebbe teoricamente avvenire covate in cui il rapporto dei sessi si avvicina a quello assunto come tipico.

Può talora esser conveniente di conoscere la media di alcuni indici di variabilità: per questo occorrerà stabilire la media degli errori teorici e quella degli errori empirici. Sarà allora:

$$(6) \qquad mr_1 = \sqrt{\left\{ p'q' \left(\frac{s_1'}{n_1'} + \frac{s_2'}{n_2'} + \cdots \right) \frac{N'}{N'-1} + \right.}$$

$$\left. + p''q'' \left(\frac{s_1''}{n_1''} + \frac{s_2''}{n_2''} + \cdots \right) \frac{N''}{N''-1} + \cdots \right\} \frac{1}{\Sigma g_i}$$

$$(7) \qquad mr_2 = \sqrt{\frac{\Sigma \frac{g_1}{g_1 - 1} \Sigma_g (d_{gi})^2}{\Sigma g_i}}$$

e, per conseguenza, l'indice medio di variabilità:

$$(8) \qquad mV = \frac{mr_2}{mr_1}$$

capace di assumere valori analoghi e aventi lo stesso significato di quelli assunti da V.

* * *

Senza riportare le tabelle analitiche, che riuscirebbero eccessivamente ingombranti, ci limitiamo a riassumere nel quadro seguente le varie condizioni sperimentali a cui corrispondono i gruppi di dati di cui ci siamo serviti dando insieme i rispettivi valori di r_1, r_2, V, mr_1, mr_2, mV, ottenuti applicando le formule precedenti.

Condizioni in cui si ottennero le covate	Num. d'ordine	CONDIZIONI SPERIMENTALI	Num. complessivo dei nati	Num. delle covate	Num. degli individui a cui si riferiscono le medie	τ_1	τ_2	V	$m\tau_1$	$m\tau_2$	MV
		DATI DI BASILE.									
Normali	1	Covate di conigli normali	440	—	9	8.01	12.84	1.6030	—	—	—
Femmine iniettate con lecitina Merck	2	Covate di coniglie iniettate con lecitina Merck	32	6	—	22.76	16.43	0.7219	—	—	—
	3	Medie di gruppi di covate di coniglie iniettate con lecitina Merck distinte secondo le femmine	32	6	2	—	—	—	22.94	15.27	0.6656
Femmine iniettate con Bioplastina Serono	4	Covate di coniglie iniettate con Bioplastina Serono	117	17	—	21.20	15.77	0.7438	—	—	—
	5	Medie di gruppi di covate di coniglie iniettate con Bioplastina Serono distinte secondo le femmine	117	17	6	—	—	—	20.47	17.97	0.8779
		DATI DI RUSSO.									
Normali	6	Covate di coniglie normali	687	100	—	20.00	17.28	0.8640	0.7165	—	—
		DATI DI COPMAN E PARSONS.									
Normali	7	Covate di topi normali	442	73	—	21.44	22 31	1.0406	—	—	—
	8	Medie di gruppi di covate di topi normali distinte secondo le femmine	372	62	17	—	—	—	22.09	20.94	0.9479
	9	Medie di gruppi di covate di topi normali distinte secondo i maschi	431	71	8	—	—	—	21.60	21.63	1.0014
	10	Medie di gruppi di covate di topi normali distinte secondo le coppie	117	20	9	—	—	—	22.05	25.32	1.1483
		DATI DI SCHULTZE.									
Varie	11	Covate di topi bianchi sottoposti a svariate condizioni di allevamento . . .	1132	200	—	22.46	23.29	1.0369	—	—	—
Primiparità	12	Covate di femmine di topi bianchi primipare che hanno appena raggiunto la maturità sessuale accoppiate con maschi nelle stesse condizioni (10-15 settimane) .	125	22	—	18.67	21.86	1 1708	—	—	—
	13	Covate di femmine di topi primipare di diverse età	196	39	—	22.57	26.31	1.1657	—	—	—
	14	Medie di gruppi di covate di femmine di topi primipare distinte secondo l'età da 10 a 37 settimane in cui avvenne il parto	196	39	39	—	—	—	23.56	25.72	1.0917
Domanda sessuale	15	Covate di femmine di topi accoppiate secondo la loro domanda sessuale (*Inanspruchnahme*) in modo cioè da rendere minimo l'intervallo fra i parti . . .	259	37	—	20.40	18.47	0.9054	—	—	—
Endogamia	16	Covate di femmine di topi accoppiate con maschi legati ad esse da stretta parentela (endogamia)	311	58	—	23.44	24.74	1.0555	—	—	—
Ricerche con la fame	17	Covate di femmine di topi bianchi sottoposte in varii modi all'affamamento .	247	44	—	22.23	23.12	1,0400	—	—	—
	18	Medie di gruppi di covate di topi bianchi distinte secondo le diete a cui vennero sottoposti i riproduttori: *I gruppo*: nutriti con 3 gr. di avena giornalieri e poco pane nero ogni 2 giorni *II gruppo*: prima covata di coppie normali (covate di controllo) e seconda covata delle stesse coppie col maschio affamato	247	44	20	—	—	—	22.25	24 21	1.912
	19	Medie di gruppi di covate di topi bianchi distinti secondo le diete a cui vennero sottoposti i riproduttori (idem come sopra escluse le covate di controllo) .	165	30	20	—	—	—	22.66	26.29	1.1778

Condizion. in cui si ottennero le covate	Num. d'ordine	CONDIZIONI SPERIMENTALI	Num. complessivo dei nati	Num. delle covate	Num. degli individui a cui si riferiscono le medie	τ_1	τ_2	V	$m\tau_1$	$m\tau_2$	MV
Varie	20	**Medie di gruppi di covate di topi bianchi distinte secondo le femmine:**									
		a) computo complessivo (analogo al num. 11)	817	136	28	—	—	—	21.26	22.32	1.0499
		b) computo complessivo escluse le covate di riproduttori affamati . . .	570	108	14	—	—	—	21.84	21.94	1.0046
		c) domanda sessuale (analoga al numero 15)	259	37	4	—	—	—	20.44	15.59	0.7627
		d) endogamia (analoga al num. 16) .	311	58	7	—	—	—	22.76	25.32	1.1125
		e) covate di riproduttori affamati .	247	13	3	—	—	—	20 62	25.97	1.2594
		f) covate di femmine normali: 1° con maschii nutriti; 2° con maschi affamati	157	28	14	—	—	—	21.66	21.43	0.9894
	21	**Medie di gruppi di covate di topi bianchi sottoposti a svariate condizioni di allevamento distinte secondo i maschi .**	311	60	5	—	—	—	22.77	23.60	1.0364
	22	**Medie di gruppi di covate di topi bianchi sottoposti a svariate condizioni di allevamento distinti secondo le coppie .**	271	51	14	—	—	—	22.44	20.30	0.9046

I dati di Basile sui conigli normali a rigore non avrebbero potuto essere utilizzati perchè essi dànno solo il totale dei maschi e delle femmine ottenuti in numerose covate delle varie madri.

* * *

Esamineremo in una prossima Nota quali osservazioni suggeriscano le cifre che abbiamo esposte.

E. M.